机密★启用前

重 庆 邮 电 大 学

2022 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目名称： 高等代数 （A）卷

科目代码： 822

考生注意事项

1、 答题前，考生必须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2、 所有答案必须写在答题纸上，写在其他地方无效。原则上按顺序作答，所有答案必须标注题号。
3、 填（书）写必须使用黑色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4、 考试结束，将答题纸和试题一并装入试卷袋中交回。
5、 本试题满分 150 分，考试时间 3 小时。

一、 填空题（本大题共 5 小题，每小题 6 分，共 30 分）

1. 设$f(x),g(x)\in P[x]$，则$f(x),g(x)$互素的充要条件是在$P[x]$中存在$u(x),v(x)$，使得___________________。

2. 若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，那么它的任意一个非空部分组线性__________;若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$中有一部分线性相关，那么整个向量组线性_______。(填相关或无关）

3. 设$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$的三个特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，则$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=$__________，$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=$__________。

4. 设 $W=\left\{\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}\right\}$是一个线性空间，求它的一个基是_____________，W的维数是___________。

5. 二次型$f(x_1,x_2)=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$的矩阵为_____，秩为_______。

二、 计算题（本大题共 3 小题，每小题 18 分，共 54 分）

6. 设线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda \\ x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2 \end{cases}$$

讨论当λ取何值时，方程组有唯一解、无解或无穷多组解，并在有唯一解时求出这个唯一

解，有无穷多组解时求出通解。

7. 计算下列行列式

（1）$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & n-4 & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$；

（2）$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$，其中$a_1a_2\cdots a_n \neq 0$。

8.设二次型矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & x & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$与$B=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$相似,

(1) 利用相似矩阵的性质，求x, y；

(2) 求一个正交矩阵Q, 使得$Q^{-1}AQ=B$。

三、解答题（本大题共 3 小题，每小题 17 分，共 51 分）

9.设$A=(a_{ij})_{nn}$为非零实矩阵，

(1) 证明：若$|A|$的每一元素a_{ij}都等于它自己的代数余子式，则秩$A=n$；

(2) 求$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix}$的值。

10. 已知A,B为$n\times n$矩阵，

（1）证明：如果$AB=0$，那么秩$A+$秩$B\le n$；

（2）对齐次线性方程组$\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3=0\\2x_1-x_2+\lambda x_3=0\\3x_1+x_2-x_3=0\end{cases}$，写出线性方程组的系数矩阵$C$，设$D$的每一个列向量都是上述线性方程组的解，且$D\ne 0$，求$\lambda$的值，并利用（1）的结论求解矩阵$D$的秩和行列式$|D|$的值。

11. 设σ是n维欧几里得空间V的线性变换，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$是$V$的标准正交基，

（1）证明：σ是正交变换的充要条件是$\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\cdots,\sigma(\varepsilon_n)$也是$V$的标准正交基；

（2）设$R[x]_3$是关于内积$(f,g)=\int_0^1 f(x)g(x)$构成的欧氏空间，由$R[x]_3$的基$1,x,x^2$，求$R[x]_3$的一个标准正交基。

四 证明题（本大题 1 小题，共 15 分）

12. 设n维线性空间V上的线性变换σ，如果$\sigma^{k-1}(\varepsilon)$不等于 0，且$\sigma^k(\varepsilon)=0$，$k=1,2,\cdots,n$。

（1）证明$\varepsilon,\sigma(\varepsilon),\ldots,\sigma^{k-1}(\varepsilon)(k>0)$是线性无关的；

（2）证明$\varepsilon,\sigma(\varepsilon),\ldots,\sigma^{n-1}(\varepsilon)$是线性空间$V$的一组基，并求线性变换$\sigma$在这组基下的矩阵。