机密★启用前

重 庆 邮 电 大 学

2022 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目名称： 数学分析 （A）卷

科目代码： 602

考生注意事项

1、 答题前，考生必须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。
2、 所有答案必须写在答题纸上，写在其他地方无效。原则上按顺序作答，所有答案必须标注题号。
3、 填（书）写必须使用黑色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。
4、 考试结束，将答题纸和试题一并装入试卷袋中交回。
5、 本试题满分 150 分，考试时间 3 小时。

一、解答下列各题（本大题含 8 个小题，每小题 8 分，共 64 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{p=1}^{n}p\,!}{n\,!}$ 。

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt[6]{x+1}}{\sqrt[3]{1+x}-1}$ 。

3. 证明不等式

$$\tan^2 x+2\sin^2 x>3x^2,\quad 0<x<\frac{\pi}{2}\ 。$$

4. 求不定积分 $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{\sin x\cos^7 x}}$ 。

5. 计算 $\iint_D\sqrt{[y-3x^2]}\,d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\mid 3x^2\le y\le 3\}$，$[y-3x^2]$ 表示 $y-3x^2$ 的取整函数。

6. 设 $z=f(x,y)$ 是二阶连续可微函数，令 $u=x+ay,v=x-ay$，其中 a 为不等于 0 的常数。证明：

$$a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4a^2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\ 。$$

7. 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt[n]{n}-1)$ 的敛散性。

8. 设函数 $f(x)\ge 0$ 且在 $[a,b]$ 上连续。证明：

$$\lim_{n\to\infty}\left[\int_a^b (f(x))^n dx\right]^{\frac{1}{n}}=\max_{x\in[a,b]}f(x)\ 。$$

注：所有答案必须写在答题纸上，试卷上作答无效！

二、（14 分）设 $a_1>b_1>0$，记

$$a_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\ ,\quad b_n=\frac{2a_{n-1}b_{n-1}}{a_{n-1}+b_{n-1}}\ ,\quad n=2,3,\cdots。$$

证明：数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的极限都存在且等于 $\sqrt{a_1b_1}$ 。

三、（14 分）设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 ς 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的唯一最大值点。若数列 $\{x_n\}\subset[a,b]$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(\varsigma)$ ，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\varsigma$ 。

四、（14 分）应用区间套定理证明罗尔中值定理。

五、（14 分）设对每一个 n，$f_n(x)$ 为 $[a,b]$ 上的单调函数。证明：如果函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上收敛于连续函数 $f(x)$，则 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$ 。

六、（14 分）证明：$f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{t}{2+t^x}dt$ 在（2，$+\infty$）上连续。

七、（16 分）设有椭球面 $\Omega:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ，S 为单位球面 $x^2+y^2+z^2=$ 。证明：Ω 的面积为

$$\Delta\Omega=\iint\limits_S\sqrt{b^2c^2x^2+c^2a^2y^2+a^2b^2z^2}\,a\ ,$$

且

$$\Delta\Omega\geq\iint\limits_S(bcx^2+cay^2+abz^2)dS=\frac{4}{3}\pi(bc+ca+ab)。$$