2019 年全国硕士研究生入学统一考试数学（二）真题解析 1.0 版

说明：试题为梅花卷，同一道题目中，不同考生的选项顺序不同。请在核对答案时注意题目和选项的具体内容。

一、选择题：

1. 当 $x \to 0$ 时，若 $x - \tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小，则 $k =$

A.1　　B.2

C.3　　D.4

2. 设函数 $y = x\sin x + 2\cos x$ 在 $(0, 2\pi)$ 的拐点是

A. $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$　　B. $(0,2)$

C. $(\pi, -2)$　　D. $\left(\frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}\right)$

3. 下列反常积分收敛的是

A. $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$　　B. $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$

C. $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$　　D. $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}dx$

4. 已知微分方程 $y'' + ay' + by = ce^x$ 的通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + e^x$，则 a, b, c 依次为（　）

A. 1，0，1 B. 1，0，2

C. 2，1，3 D. 2，1，4

5. 已知积分区域 $D\left\{(x,y)\middle| |x|+|y|\le\frac{\pi}{2}\right\}$， $I_1=\iint_D\sqrt{x_2+y_2}dxdy$，

$I_2=\iint_D\sin\sqrt{x_2+y_2}dxdy$， $I_3=\iint_D\left(1-\cos\sqrt{x_2+y_2}\right)dxdy$，试比较 I_1， I_2， I_3 的大小

A. $I_3<I_2<I_1$ B. $I_1<I_2<I_3$

C. $I_2<I_1<I_3$ D. $I_2<I_3<I_1$

6. 已知 $f(x)$， $g(x)$ 的二阶导在 $x=a$ 处连续，请问 $f(x)$， $g(x)$ 相切于 a 且曲率相等是 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)}{(x-a)^2}=0$ 的什么条件？

A.充分非必要条件 B.充分必要条件

C. 必要非充分条件 D.既非充分又非必要条件

7. 设 A 是四阶矩阵，A^* 是 A 的伴随矩阵，若线性方程组 $AX=0$ 的基础解系中只有 2 个向量，则 A^* 的秩是（ ）

A.0 B.1

C.2 D.3

8. 设 A 是 3 阶实对称矩阵， E 是 3 阶单位矩阵.若 $A^2+A=2E$,且 $|A|=4$，则二次型 x^TAx 规范形为（ ）

A. $y_1^2+y_2^2+y_3^2$ B. $y_1^2+y_2^2-y_3^2$

C. $y_1^2-y_2^2-y_3^2$ D. $-y_1^2-y_2^2-y_3^2$

二、填空题

9. $\lim\limits_{x\to 0}(x+2^x)^{\frac{2}{x}}=$ _______.

10. 曲线 $\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases}$ 在 $t=\frac{3}{2}\pi$ 对应点处切线在 y 轴上的截距 ________.

11. 设函数 $f(u)$ 可导，$z=yf(\frac{y^2}{x})$，则 $2x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=$________.

12. 设函数 $y=\ln\cos x$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$ 的弧长为_____

13. 已知函数 $f\left(x\right)=x\int_1^x\frac{\sin t^2}{t}dt$，则 $\int_0^1 f\left(x\right)dx=$______

14. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\-2&1&-1&1\\3&-2&2&-1\\0&0&3&4\end{pmatrix}$，$A_{ij}$ 表示 $|A|$ 中 (i,j) 元的代数余子式，则 $A_{11}-A_{12}=$_

三、解答题

15. 已知 $f(x)=\begin{cases}x^{2x},x>0\\xe^x+1,x\le 0\end{cases}$，求 $f'(x)$ 并求 $f(x)$ 的极值.

16. 求不定积分 $\int\frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)}dx$.

17. 已知 $y\left(x\right)$ 满足微分方程 $y'-xy=\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\frac{x^2}{2}}$，且有 $y\left(1\right)=\sqrt{e}$.

（1）求 $y\left(x\right)$;

（2）$D=\left\{(x,y)\,|\,1\le x\le 2,0\le y\le y(x)\right\}$.求平面区域 D 绕 x 轴旋转绕成的旋转体体积.

18. 已知平面区域 D 满足 $\left(x^2+y^2\right)^3=y^4$，求 $\iint_D\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$.

19. 求曲线 $y=e^{-x}\sin x(x\ge 0)$ 与 x 轴之间图形的面积.

20. 已知函数 $\mu(x,y)$ 满足 $2\frac{\partial^2\mu}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2\mu}{\partial y^2}+3\frac{\partial\mu}{\partial x}+3\frac{\partial\mu}{\partial y}=0$，求 a,b 的值，使得在变换 $\mu(x,y)=v(x,y)e^{ax+by}$ 下，上述等式可化为 $v(x,y)$ 不含一阶偏导数的等式.

21. 已知函数 $f(x,y)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数，且 $f(0)=0, f(1)=1, \int_0^1 f(x)dx=1$，证明：

（1）存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=0$

（2）存在 $\eta\in(0,1)$，使得 $f''(\eta)<-2$

22. 已知向量组（Ⅰ）$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\4\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\4\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\2\\a^2+3\end{bmatrix}$

（Ⅱ）$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\a+3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}0\\2\\1-a\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_3=\begin{bmatrix}1\\3\\a^2+3\end{bmatrix}$

若向量组（Ⅰ）和向量组（Ⅱ）等价，求 a 的取值，并将 $\boldsymbol{\beta}$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示

23. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2&-2&1\\2&x&-2\\0&0&-2\end{bmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&-1&0\\0&0&y\end{bmatrix}$ 相似

（1）求 x,y.

（2）求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}=\boldsymbol{B}$。

数学（二）参考答案及解析（社科赛斯数学教研团队提供）

1. 【答案】C

【解析】$x-\tan x\sim-\frac{1}{3}x^3$, 与 x^k 同阶，所以 $k=3$，选 C.

2. 【答案】B

【解析】$y'=\sin x+x\cos x-2\sin x, y''=-x\sin x$，令 $y''=0$ 得 $x=0, x=\pi$，

又因为 $y'''=-\sin x-x\cos x$，将上述两点代入得 $y'''\neq0$，所以 $(\pi,-2)$ 是拐点.

3. 【答案】D

【解析】直接计算，$\int_0^{\infty}\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\Big|_0^{\infty}$ 发散.

4. 【答案】D

【解析】由通解形式知，$\lambda_1=\lambda_2=-1$，故特征方程为 $(\lambda+1)^2=\lambda^2+2\lambda+1$，所以 $a=2,b=1$，又由于 $\overline{y}=e^x$ 是 $y''+2y'=ce^x$ 的特解，代入得 $c=4$.

5. 【答案】

【解析】积分可看作：

$$I_1=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2(\sin\theta+\cos\theta)}}\sqrt{x^2+y^2}r\mathrm{d}r=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2(\sin\theta+\cos\theta)}}r^2\mathrm{d}r$$

$$I_2=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2(\sin\theta+\cos\theta)}}r\cdot\sin r\mathrm{d}r$$

$$I_3=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2(\sin\theta+\cos\theta)}}r\cdot(1-\cos r)\mathrm{d}r$$

$$\begin{cases}\sin x\le 1\\ \cos x\le 1\end{cases}\text{由}\begin{cases}\sin^2x+\cos^2x=1\\ \cos x<1\end{cases}\Rightarrow 1-\cos x<\sin x\Rightarrow x>\sin x>1-\cos x,$$

即 $I_1>I_2>I_3$

6. 【答案】A

【解析】充分性：由 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)-g(x)}{(x-a)^2}=0$ 利用洛必达法则分别可得 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f^{'}(x)-g^{'}(x)}{2(x-a)}=0$ 和 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f^{''}(x)-g^{''}(x)}{2}=0$，则可得 $f(a)=g(a)$，$f^{'}(a)=g^{'}(a)$，$f^{''}(a)=g^{''}(a)$.由此可知在 a 处的切线和曲率均相同，充分性得证.

必要性：由函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 a 处有相同的切线可知 $f(a)=g(a)$　$f^{'}(a)=g^{'}(a)$ 又由曲率相同可知 $f^{''}(a)=g^{''}(a)$ 或 $f^{''}(a)=-g^{''}(a)$，当 $f^{''}(a)=-g^{''}(a)$ 时，$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)-g(x)}{(x-a)^2}=0$ 不一定成立.

7. 【答案】A

【解析】由于方程组的基础解系中只有两个向量，则 $r(A)=2<3, r(A^*)=0$.

8. 【答案】C

【解析】由 $A^2+A=2E$ 可得 A 的所有特征值为 $\lambda^2+\lambda$-2=0 的根，即 λ_1=1，λ_2=-2 .又 $|A|=4$ 可得 λ_1=1 为一重特征值，λ_2=-2 为二重特征值,故 X^TAX 的规范型为 $y_1^2-y_2^2-y_3^2$.

9. 【答案】e^2+4

【解析】$\lim\limits_{x\to0}(x+2^x)^{\frac{2}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2}{x}\ln(x+2^x)}$

其中 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2}{x}\ln(x+2^x)=2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(x+2^x\ln2)}{x}=2(1+\ln2)$，

所以 $\lim\limits_{x\to0}(x+2^x)^{\frac{2}{x}}=e^{2+2\ln2}=4e^2$

10. 【答案】$\dfrac{3}{2}\pi+2$

【解析】$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\sin t}{1-\cos t}$，当 $t=\dfrac{3}{2}\pi$ 时 $x=\dfrac{3}{2}\pi+1, y=1, \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-1$，所以在 $t=\dfrac{3}{2}\pi$ 对应点处的切线方程为 $y=-x+\dfrac{3}{2}\pi+2$，所以切线在 y 轴上的截距为 $\dfrac{3}{2}\pi+2$.

11. 【答案】$yf(\dfrac{y^2}{x})$

【解析】$\dfrac{\partial z}{\partial x}=yf'(\dfrac{y^2}{x})(-\dfrac{y^2}{x^2})=-\dfrac{y^3}{x^2}f'(\dfrac{y^2}{x})$；

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=f(\dfrac{y^2}{x})+yf'(\dfrac{y^2}{x})(\dfrac{2y^2}{x})=f(\dfrac{y^2}{x})+\dfrac{2y^2}{x}f'(\dfrac{y^2}{x})$.所以 $2x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=yf(\dfrac{y^2}{x})$

12. 【答案】$\frac{1}{2}\ln 3$

【解析】弧长为

$$s=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{1+(y')^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{1+\tan^2 x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos x}\mathrm{d}x$$

$$=\ln\left|\frac{1}{\cos x}+\tan x\right|\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}}=\ln\sqrt{3}=\frac{1}{2}\ln 3$$

13. 【解析】设 $F(x)=\int_1^x\frac{\sin t^2}{t}dt$，则

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 xF(x)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 F(x)dx^2=\frac{1}{2}\left[x^2F(x)\right]\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2dF(x)$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2F'(x)dx=-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\frac{\sin x^2}{x}dx$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1 x\sin x^2dx=\frac{1}{4}\cos^2 x\Big|_0^1=\frac{1}{4}(\cos 1-1)$$

14. 【解析】

$$A_{11}-A_{12}=|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}-1&1&0&0\\-2&1&-1&1\\3&-2&2&1\\0&0&3&4\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}-1&0&0&0\\-2&-1&-1&1\\3&1&2&-1\\0&0&3&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&-1&1\\1&2&-1\\0&3&4\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}-1&-1&1\\0&1&0\\0&3&4\end{vmatrix}=-4$$

15. 【答案】 $f'(x)=\begin{cases}2x^{2x}(\ln x+1);x>0\\ e^x(x+1);x<0\end{cases}$，极大值 $f(0)=1$.

极小值 $f(-1)=1-\frac{1}{e}, f\left(\frac{1}{e}\right)=e^{-\frac{2}{e}}$.

【解析】当 $x>0$ 时：

$$f'(x)=\left(e^{2x\ln x}-1\right)'=\left(e^{2x\ln x}\right)'=e^{2x\ln x}(2\ln x+2)=2x^{2x}(\ln x+1)$$

当 $x<0$ 时： $f'(x)=e^x+xe^x=e^x(x+1)$

因此 $f'(x)=\begin{cases}2x^{2x}(\ln x+1);x>0\\ e^x(x+1);x<0\end{cases}$，

当 $x=0$：

$$f_+'(0)=\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{x^{2x}-1}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{e^{2x\ln x}-1}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{2x\ln x}{x}=-\infty$$

$$f_-'(0)=\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{xe^x}{x}=\lim_{x\to0+}e^x=0$$

当 $x>0$ 时， $f'(0)<0, f(x)$ 单调递减，当 $x<0$ 时 $f'(0)>0, f(x)$ 单调递增，

因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取极大值，且 $f(0)=1$.

令 $f'(x)=0$ 得， $x=-1$ 及 $x=\frac{1}{e}$.又 $f''(-1)>0, f''\left(\frac{1}{e}\right)>0$，

故极小值为 $f(-1)=1-\frac{1}{e}, f(\frac{1}{e})=e^{-\frac{2}{e}}$.

16. 【答案】 $-2\ln|x-1|-\frac{3}{x-1}+\ln(x^2+x+1)+C$

【解析】由于 $\frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)}=-\frac{2}{x-1}+\frac{3}{(x-1)^2}+\frac{2x+1}{x^2+x+1}$

则原积分可化为：

$$\int \frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)}dx = -2\int \frac{1}{x-1}dx + 3\int \frac{1}{(x-1)^2}dx + \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$$

$$= -2\ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + \int \frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1}$$

$$= -2\ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + \ln(x^2+x+1) + C$$

17. 【答案】（1） $y(x) = \sqrt{x}e^{\frac{x^2}{2}}$ （2） $\frac{\pi}{2}(e^4 - e)$

【解析】（1） $y(x) = e^{-\int -xdx}(C + \int \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\frac{x^2}{2}} \cdot e^{\int -xdx}) = e^{\frac{x^2}{2}}(C + \sqrt{x})$

因为 $y(1) = \sqrt{e}$，故 $C=0$，所以 $y(x) = \sqrt{x}e^{\frac{x^2}{2}}$

（2）由旋转体体积公式：

$$V = \pi \int_1^2 (\sqrt{x}e^{\frac{x^2}{2}})^2 dx = \pi \int_1^2 x e^{x^2} dx = \frac{\pi}{2}(e^4 - e)$$

18. 【解析】

$\left(x^2+y^2\right)^3 = y^4$ 的极坐标方程为 $r = \sin^2\theta$，由对称性：

$$\iint_D \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}d\sigma = \iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}d\sigma$$

$$=\iint_{D_1}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}d\sigma=2\iint_{D_1}\frac{r\sin\theta}{r}rdrd\theta$$

$$=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^{\sin^2\theta}r\sin\theta dr\right]d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\theta d\theta$$

$$=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos^2\theta\right)^2d\cos\theta$$

$$=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1-2\cos^2\theta+\cos^4\theta\right)d\cos\theta$$

$$=-\left[\cos\theta-\frac{2}{3}\cos^3\theta+\frac{1}{5}\cos^5\theta\right]\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\left[\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{2}{3}\times\frac{2\sqrt{2}}{8}+\frac{1}{5}\times\frac{4\sqrt{2}}{32}\right]$$

$$=\frac{43}{120}\sqrt{2}$$

19. 【答案】略

【解析】设在区间$[n\pi,(n+1)\pi](n=0,1,2,\cdots)$上所围的面积记为$\mu_n$，则

$$\mu_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}e^{-x}d\cos x=-(e^{-x}\cos x-\int\cos xde^{-x})$$

$$=-e^{-x}\cos x-\int e^{-x}d\sin x$$

$$=-e^{-x}\cos x-(e^{-x}\sin x-\int\sin xde^{-x})$$

$$=-e^{-x}(\cos x+\sin x)-I$$

记$I=-\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x+\sin x)+C$，则

$\mu_n=(-1)^n(-\frac{1}{2})e^{-x}(\cos x+\sin x)+C$（注意$\cos n\pi=(-1)^n$）

因此所求面积为$\sum_{n=0}^{\infty}\mu_n=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n\pi}=\frac{1}{2}+\frac{1}{e^{\pi}+1}$.

20. 【解析】

$$\frac{\partial\mu}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}e^{ax+by}+v(x,y)ae^{ax+by}$$
$$\frac{\partial\mu}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}e^{ax+by}+v(x,y)be^{ax+by}$$
$$\frac{\partial^2\mu}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}e^{ax+by}+\frac{\partial v}{\partial x}ae^{ax+by}+a\left[\frac{\partial v}{\partial x}e^{ax+by}+v(x,y)ae^{ax+by}\right]$$
$$=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}e^{ax+by}+\frac{\partial v}{\partial x}2ae^{ax+by}+v(x,y)a^2e^{ax+by}$$
$$\frac{\partial^2\mu}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}e^{ax+by}+\frac{\partial v}{\partial y}2be^{ax+by}+v(x,y)b^2e^{ax+by}$$

带入条件中

$$2\frac{\partial^2\mu}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2\mu}{\partial y^2}+3\frac{\partial\mu}{\partial x}+3\frac{\partial\mu}{\partial y}=0$$

得$2(\frac{\partial^2\mu}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\mu}{\partial y^2})+(4a+3)\frac{\partial v}{\partial x}+(3-4b)\frac{\partial v}{\partial y}+(2a^2-2b^2+3a+3b)v(x,y)=0$

根据已知条件，上式不含一阶偏导，故$4a+3=0,3-4b=0$

即$a=-\frac{3}{4},b=\frac{3}{4}$.

21. 【解析】（1）证明：作辅助函数$F(x)=\int_0^x f(t)dt$，则由题$F(x)$在$[0,1]$连续，$(0,1)$可导，

由拉格朗日中值定理，$\exists\xi_1\in(0,1)$，使得

$$F(1)-F(0)=F'(\xi_1)$$

即 $f(\xi_1)=\int_0^1 f(x)dx=1$

又 $f(1)=1$

对 $f(x)$ 在 $(\xi_1,1)$ 用罗尔定理，$\exists\xi_1\in(\xi_1,1)\subset(0,1)$，使得 $f'(\xi)=0$

（2）令 $G(x)=f(x)+x^2$，由题显然 $G(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，$(0,1)$ 二阶可导且 $G(0)=0$，

$G(1)=f(1)+1=2$，$G(\xi_1)=f(\xi_1)+\xi_1^2\quad \xi_1\in(0,1)$，对 $G(x)$ 分别在 $(0,\xi_1)$ 和 $(\xi_1,1)$ 上

用拉格朗日中值定理，$\exists\eta_1\in(0,\xi_1)$，使得

$$\frac{G(\xi)-G(0)}{\xi_1}=G'(\eta_1),\text{即}\,G'(\eta_1)=\frac{1+\xi_1^2}{\xi_1}$$

$\exists\eta_2\in(\xi_1,1)$，使得

$$\frac{G(1)\text{-}G(\xi_1)}{1-\xi_1}=G'(\eta_2),\text{即}\,G'(\eta_1)=1+\xi_1$$

对 $G'(x)=f'(x)+2x$ 在 (η_1,η_2) 上用拉格朗日中值定理，

$\exists\eta\in(\eta_1,\eta_2)\subset(0,1)$，使得

$$\frac{G'(\eta_2)-G'(\eta_1)}{\eta_2-\eta_1}=G''(\eta_1),\text{即}\ f''(\eta)+2=\frac{\xi_1-1}{\xi_1(\eta_2-\eta_1)}<0$$

即 $f''(\eta)<-2$

22. 【答案】$a\neq-1$，$\beta_3=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$

【解析】

第一问：$(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\ \ \beta_1\ \ \beta_2\ \ \beta_3)=\begin{pmatrix}1&1&1&1&0&1\\1&0&2&1&2&3\\4&4&a^2+3&a+3&1-a&a^2+3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1&1&1&1&0&1\\0&-1&1&0&2&2\\0&0&a^2-1&a-1&1-a&a^2-1\end{pmatrix}$

(1)当 $a=1$ 时，$(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\ \ \beta_1\ \ \beta_2\ \ \beta_3)=\begin{pmatrix}1&1&1&1&0&1\\1&-1&1&0&2&2\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

易知Ⅰ与Ⅱ等价.

(2) 当 $a=-1$ 时，$(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\ \ \beta_1\ \ \beta_2\ \ \beta_3)=\begin{pmatrix}1&1&1&1&0&1\\0&-1&1&0&2&2\\0&0&0&-2&2&0\end{pmatrix}$

显然 $\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$ 不能由前三个向量线性表示，故Ⅰ与Ⅱ不等价

(3)当 $a^2\neq1$ 即 $a\neq1$ 且 $a\neq-1$ 时

$\gamma(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3)=3$,由 $\begin{vmatrix}1&0&1\\0&2&2\\a-1&1-a&a^2-1\end{vmatrix}=2(a^2-1)\neq0$, 知 $\gamma(\beta_1\ \ \beta_2\ \ \beta_3)=3$

易知Ⅰ与Ⅱ等价.

综上 $a\neq-1$ 即可

第二问：显然 $\begin{pmatrix}1\\2\\a^2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\a^2-1\end{pmatrix}$，故 $\beta_3=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$.

23. 【答案】略

【解析】（1）由于 $A\sim B$ 故 $\sum_{i=1}^{3}a_{ii}=\sum_{i=1}^{3}b_{ii}$，所以 $|A|=|B|$，

因此 $\begin{cases}x-4=1+y\\4x-8=-2y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3\\y=-2\end{cases}$

（2）由（1）可知 A 和 B 的特征值分别为 $\lambda_1=2,\lambda_2=-1,\lambda_3=-2$.

当 $\lambda_1=2$ 时，$(2E-A)x=0\Rightarrow\xi_1=(-1,2,0)^T$

当 $\lambda_2=-1$ 时，$(-E-A)x=0\Rightarrow\xi_2=(-2,1,0)^T$

当 $\lambda_3=-2$ 时，$(-2E-A)x=0 \Rightarrow \xi_3=(1,-2,-4)^T$

所以存在 $P_1=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ 使得 $P_1^{-1}AP_1=\Lambda=\begin{bmatrix}2 & & \\ & -1 & \\ & & -2\end{bmatrix}$

同理，对于矩阵 B

当 $\lambda_1=2$ 时，$(2E-B)x=0 \Rightarrow \eta_1=(1,0,0)^T$

当 $\lambda_2=-1$ 时，$(-E-B)x=0 \Rightarrow \eta_2=(1,-3,0)^T$

当 $\lambda_3=-2$ 时，$(-2E-B)x=0 \Rightarrow \eta_3=(0,0,1)^T$

所以存在 $P_2=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$ 使得 $P_2^{-1}BP_2=\Lambda=\begin{bmatrix}2 & & \\ & -1 & \\ & & -2\end{bmatrix}$

所以 $P_1^{-1}AP_1=P_2^{-1}BP_2=\Lambda \Rightarrow P_2P_1^{-1}AP_1P_2^{-1}=B$.

故存在 $P=P_1P_2^{-1}$ 使得 $P^{-1}AP=B$

$P_1=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -4\end{bmatrix}, P_2=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，所以 $P_2^{-1}=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & -\frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，即

$$P=P_1P_2^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & \frac{1}{3} & 1\\ 2 & \frac{1}{3} & -2\\ 0 & 0 & -4\end{bmatrix}$$